

Problem Set 5: 集合论导引

(提交截止时间: 3 月 11 日 10:00)

Problem 1

设集合 a, b, c 各不相同, 试判定下列命题的真假.

(a) $\emptyset \in \{\emptyset\}$

(b) $\{\{a, b\}, c, \emptyset\} = \{\{a, b\}, c\}$

(c) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

(d) $\{\{a\}, \{b\}\} = \{\{a, b\}\}$

(e) $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(f) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, a, b\} = \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, a, b\}$

Problem 2

试判断下列各集合是否为某个集合的幂集.

(a) \emptyset

(b) $\{\emptyset, \{a\}\}$

(c) $\{\emptyset, \{a\}, \{\emptyset, a\}\}$

(d) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Problem 3

试求满足下列谓词的集合, 设论域为整数集.

(a) $P(x) : x^2 < 3$

(b) $Q(x) : x^2 > x$

(c) $R(x) : x^2 = 3$

Problem 4

令 A, B, C 为集合, 证明或者否定以下集合等式的成立:

a) $(A \cup B \cup C) - (A \cup B) = C$

b) $A - (B - C) = (A - B) - (A - C)$

Problem 5

若集合分别 A, B, C 满足下列条件, 能否断言 $A = B$? 请说明理由或者给出反例.

(a) $A \cup C = B \cup C$

(b) $A \cap C = B \cap C$

(c) $A \cup C = B \cup C$ 并且 $A \cap C = B \cap C$

Problem 6

令 A 和 B 为全集 U 的子集. 证明 $A \subseteq B$ 当且仅当 $\overline{B} \subseteq \overline{A}$, 这里 \overline{A} 指绝对补集 $U - A$.

Problem 7

令集合 A, B 是全集 U 的子集, 证明如下等式成立:

a) $A \oplus A = \emptyset$

b) $A \oplus U = \overline{A}$

c) $(A \oplus B) \oplus B = A$

Problem 8

令 $A_i = \{\dots, -2, -1, 0, 1, \dots, i\}$, 试求:

(a) $\bigcup_{i=1}^n A_i$

(b) $\bigcap_{i=1}^n A_i$

Problem 9

试求下列集合之后继.

(a) $\{1, 2, 3\}$

(b) \emptyset

(c) $\{\emptyset\}$

(d) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Problem 10

令 A, B, C 为集合, 试证明: $A \cup B \cup C = (A - B) \cup (B - C) \cup (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$ 。